Ecuaciones diferenciales

Aplicaciones matemáticas para economía y negocios (EAF200A)

Felipe Del Canto

Pontificia Universidad Católica de Chile

Segundo semestre de 2020

Ecuaciones diferenciales lineales

Definición (Ecuación diferencial lineal, EDL)

Sea D un intervalo real. Una ecuación diferencial lineal (EDL) es la relación

$$y^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)y^{(k-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = g(t), \qquad t \in D$$

donde $y^{(j)}$ es la derivada de orden j de la función y. Además, decimos que

- La ecuación es **homogénea** si $g(t) = 0$ para todo t.
- La ecuación es **no homogénea** si $g(t) \neq 0$.

- La ecuación $y'(t) = ay(t) + b$ es lineal y no homogénea si $b \neq 0$.

Ejemplo (Ecuación diferencial lineal, EDL)

En la introducción, revisamos un ejemplo de una EDL homogénea de orden 1:

$$y'(t) = y(t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

La solución general de esta ecuación era $y_g(t) = ce^t$. Es decir, hay una cantidad infinita de soluciones.

Según el teorema de existencia y unicidad, solo hay una solución para el problema de valores iniciales con $y(0) = 1$, que es $y(t) = e^t$.

Ahora, nos gustaría pensar en la ecuación no homogénea, con $g(t) = b$, una constante:

$$y'(t) - y(t) = b$$

Ejemplo (Ecuación diferencial lineal, EDL)

Lamentablemente, no podemos hacer el juego anterior de "reconstruir la función". Pero podemos notar lo siguiente:

$$y'(0) - y(0) = b$$

Observar que si $y(0) = -b$, entonces $y'(0) = 0$, es decir, y es localmente constante. ¿Pero si fuera constante siempre? Notar que definiendo $y_p(t) = -b$, entonces tenemos que

$$y_p'(t) - y_p(t) = -(-b) = b$$

Es decir, ¡hemos encontrado una solución! Si argumentamos como en las EeDL, podríamos pensar que

$$y(t) = y_g(t) + y_p(t) = ce^t - b$$

es solución a la ecuación no homogénea.

Ejemplo (Ecuación diferencial lineal, EDL)

Verifiquemos

$$\begin{aligned} y'(t) - y(t) &= y_g'(t) - y_g(t) + y_p'(t) - y_p(t) \\ &= \left(ce^t\right)' - ce^t + (-b)' - (-b) \\ &= ce^t - ce^t + 0 + b \\ &= b \end{aligned}$$

¡Y efectivamente es solución! Resultará, igual que antes, que estas son todas.

Ejercicio (Ecuación diferencial lineal, EDL)

Ocupe un razonamiento como el anterior para resolver la siguiente EDL de primer orden

$$y'(t) - 2y(t) = 1$$

Ecuaciones diferenciales lineales (EDLs)

- El ejemplo anterior nos dejó dos enseñanzas:
  - Sumar soluciones tiene efectos interesantes.
  - Las soluciones de una EDL no homogénea se escriben como sumas.

- Vamos a formalizar estos resultados a continuación.

- Y en lo que queda del capítulo veremos lo siguiente:
  - EDLs de primer orden (en varias formas).
  - Análisis cualitativo de soluciones (soluciones estacionarias y diagramas de fase).
  - EDLs de segundo orden con coeficientes constantes. (Tal vez no alcancemos ☹)

Teorema (Combinaciones lineales de soluciones)

Sea D un intervalo real. Considere la EDL homogénea

$$y^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)y^{(k-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = 0, \qquad t \in D$$

Sea $y_1(t)$ una solución y sea $c_1 \in \mathbb{R}$. Entonces el sistema dinámico $c_1y_2(t)$ también es solución.

Además, si $y_2(t)$ es otra solución y $c_2 \in \mathbb{R}$, entonces el sistema dinámico $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ también es solución.

- Para la EDL $y'(t) = y(t)$ teníamos que e^t era solución.
  - Entonces, también lo es ce^t para todo $c \in \mathbb{R}$.

Teorema (Solución general de la EDL no homogénea)

Considere la EDL no homogénea

$$y^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)y^{(k-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = g(t), \qquad t \in D \, D \text{ intervalo}$$

y sea $y_p(t)$ una solución particular. Sea $y_g(t)$ la solución general a la ecuación homogénea asociada,

$$y^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)y^{(k-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = 0, \qquad t \in D, D \text{ intervalo}$$

Entonces toda solución para la EDL no homogénea es de la forma $y_g(t) + y_p$.

- En el ejemplo de la EDL $y'(t) = y(t) + b$ la solución general es

$$ce^t - b$$

EDLs DE PRIMER ORDEN

- En esta parte nos centramos en EDLs muy particulares:
  - Son de orden 1.
  - Los coeficientes $a_i(t)$ son constantes.

- La ecuación tipo que revisaremos va a ser

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t), \qquad t \geq 0, \quad a, b_t \in \mathbb{R}$$

pero partiremos con $a(t) = a$ y $b(t) = b$ constantes.

- ¿Cuál es la solución general de la ecuación homogénea $y'(t) + ay(t) = 0$?

Teorema (EDL homogénea de primer orden con coeficientes constantes)

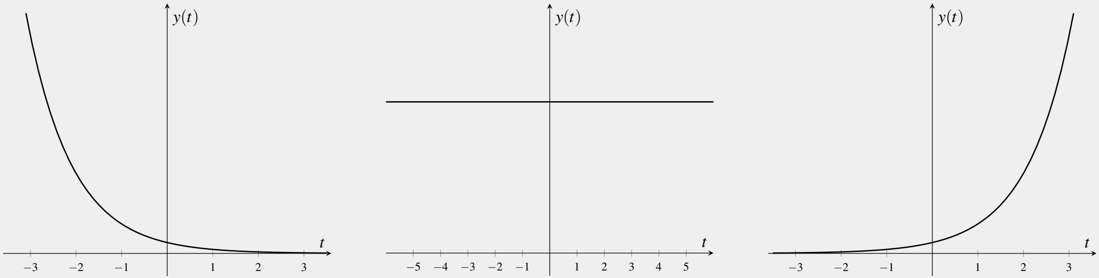
Considere la EDL homogénea

$$y'(t) + ay(t) = 0, \qquad t \in D, D \text{ intervalo}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Entonces toda solución a esta ecuación es de la forma ce^{-at}, con $c \in \mathbb{R}$.

- ¿Qué pasa si $t \to \infty$, cuando $a > 0$?
  - Ocurre que $y(t) \to 0$.
- ¿Qué pasa si $t \to \infty$, cuando $a < 0$, con $c \neq 0$?
  - Ocurre que $y(t) \to \infty$ si $c > 0$ e $y(t) \to -\infty$ si $c < 0$.
- ¿Qué pasa cuando $a = 0$?
  - Ocurre que $y(t) = c$, es una constante.

EDLs de primer orden con coeficientes constantes



(a) $a > 0$ y $c > 0$ **(b)** $a = 0$ y $c > 0$ **(c)** $a < 0$ y $c > 0$

- Ahora, pensemos en la ecuación no homogénea, con b constante

$$y'(t) + ay(t) = b, \qquad t \in D$$

- Según la sección anterior, basta que encontremos una solución particular.

- ¿Será que podemos encontrar una solución $y_p(t) = C$, una constante?.

- Para que eso sea así, se debe cumplir la ED:

$$\begin{aligned} y_p'(t) + a y_p(t) &= b \\ 0 + aC &= b \\ aC &= b \end{aligned}$$

- Luego, si $a \neq 0$, tenemos una solución particular

$$y_p(t) = \frac{b}{a}$$

- Así, cualquier solución a la EDL no homogénea

$$y'(t) + ay(t) = b, \qquad t \in D$$

cuando $a \neq 0$ se ve

$$y(t) = ce^{-at} + \frac{b}{a}$$

- En un problema con valores iniciales, c se determina a partir del valor de $y(0)$

$$y(0) = c \cdot e^{-a \cdot 0} + \frac{b}{a} = c + \frac{b}{a}$$

Ejemplo (EDL de primer orden con coeficientes constantes)

Los modelos de empleo también pueden revisarse en tiempo continuo. Supongamos que la cantidad de personas empleadas en el año t, $L(t)$, decrece a una tasa constante del 10 % (por los jubilados), pero además llegan nuevos empleados por los egresos universitarios. La evolución de L se puede describir por la siguiente EDL de primer orden:

$$L'(t) + 0{,}1L(t) = 1000$$

Llamando $t = 0$ al año 2005, suponga que $L(0) = 6000$.

Según lo anterior, el número de trabajadores en el tiempo t es

$$L(t) = ce^{-0{,}1t} + \frac{1000}{0{,}1} = ce^{-0{,}1t} + 10000$$

Ejemplo (EDL de primer orden con coeficientes constantes)

Pero la constante c debe ser tal que $L(0) = 6000$. Es decir

$$6000 = L(0) = ce^{-0{,}1\cdot 0} + 10000 = c + 10000$$

Luego $c = -4000$. Así, la solución a este problema de valores iniciales es

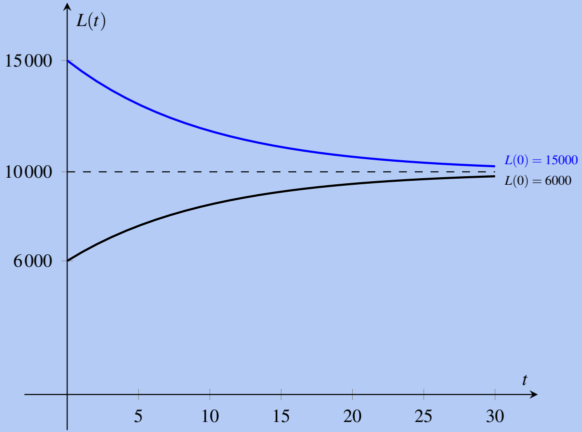
$$L(t) = -4000e^{-0{,}1t} + 10000$$

¿Qué pasa en el largo plazo, cuando $t \to \infty$? En ese caso, $e^{-0{,}1t} \to 0$ y por lo tanto $L(t) \to 10000$. Notar que en este caso $L(t)$ es siempre creciente.

¿Y si $L(0) = 15000$? En este caso, tendríamos $c = 5000$ y, aunque $L(t) \to 10000$, pasa que $L(t)$ es drececiente.

Ejemplo (EDL de primer orden con coeficientes constantes)

Podemos ver las diferencias en el siguiente gráfico



Ejercicio (EDL de primer orden con coeficientes constantes)

Para la situación del ejemplo anterior, determine la tasa de crecimiento necesaria para que el número de empleados en el largo plazo sea

a) El doble de la cantidad inicial.

b) Igual a la cantidad inicial.

En ambos casos escriba y grafique el sistema dinámico resultante.

Ejercicio (EDL de primer orden con coeficientes constantes)

Encuentre la solución general a la EDL no homogénea con $a = 0$, es decir, encuentre todos los sistemas dinámicos que resuelven

$$y'(t) = b, \qquad t \in D$$

Ejercicio (EDL de primer orden con coeficientes constantes)

Analice qué ocurre cuando $t \to \infty$ con la solución de la EDL no homogénea

$$y'(t) + ay(t) = b, \qquad t \in D$$

con valor inicial $y(0) = C$, en los siguientes casos:

a) $a < 0$.

b) $a > 0$.

c) $a = 0$.

- Ahora queremos analizar un grado más de complejidad: $b(t)$ no constante.

- Es decir, vamos a mirar una ecuación del tipo

$$y'(t) + ay(t) = b(t), \qquad t \in D$$

- Encontrar soluciones a este tipo de ecuaciones puede ser **DIFÍCIL**.
  - Pero vamos a seguir el mismo método que para las EeDL.
  - El **método de los coeficientes indeterminados**.

- La siguiente tabla resume los casos típicos que veremos en el curso:

$b(t)$	Candidato
be^{kt}	Ae^{kt}
$\operatorname{sen}(bt)$ ó $\cos(bt)$	$A\operatorname{sen}(bt) + B\cos(bt)$
bt^n	$A_0 + A_1 t + \cdots + A_n t^n$

- ¿Y si $b(t)$ es una combinación de algunas de las opciones?
  - Entonces el candidato es combinación de las soluciones correspondientes.
  - Si $b(t) = e^{kt}\operatorname{sen}(bt)$.
  - La solución particular es $e^{kt}(A\operatorname{sen}(bt) + B\cos(bt))$.

Ejemplo (Método de los coeficientes indeterminados)

Estudiemos una variante del modelo de empleo que vimos antes. Supongamos que la tasa de decrecimiento de la cantidad de empleados se mantiene en 10 % pero que producto del acceso a estudios de postgrado para trabajadores, los nuevos empleados por egresos universitarios oscilan. Vamos a pensar que la evolución de L se describe de la siguiente manera:

$$L'(t) + 0{,}1L(t) = 1000\,\mathrm{sen}\,(0{,}1t)$$

Seguiremos suponiendo que 2005 es $t = 0$ y que $L(0) = 6000$.

Ya hemos mencionado que la solución general a la ecuación homogénea asociada es

$$L_g(t) = ce^{-0{,}1t}$$

Ejemplo (Método de los coeficientes indeterminados)

Ahora, para encontrar la solución particular, la tabla anterior dice que debiera ser de la forma

$$L_p(t) = A\operatorname{sen}(0{,}1t) + B\cos(0{,}1t)$$

Para encontrar las constantes A y B necesitamos usar la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} L_p'(t) + 0{,}1L(t) &= 1000\operatorname{sen}(0{,}1t) \\ 0{,}1A\cos(0{,}1t) - 0{,}1B\operatorname{sen}(0{,}1t) + 0{,}1A\operatorname{sen}(0{,}1t) + 0{,}1B\cos(0{,}1t) &= 1000\operatorname{sen}(0{,}1t) \end{aligned}$$

Despejando obtenemos

$$(0{,}1A + 0{,}1B)\cos(0{,}1t) + (0{,}1A - 0{,}1B - 1000)\operatorname{sen}(0{,}1t) = 0$$

Ejemplo (Método de los coeficientes indeterminados)

Puede ser difícil de probar (o de ver), pero la única manera que esto ocurra es que ambos paréntesis sean 0:

$$0{,}1A + 0{,}1B = 0$$
$$0{,}1A - 0{,}1B = 1000$$

Cuya solución es $A = 5000$ y $B = -5000$. Con esto, la solución general a la ecuación no homogénea es

$$L(t) = ce^{-0{,}1t} + 5000\big(\operatorname{sen}(0{,}1t) - \cos(0{,}1t)\big)$$

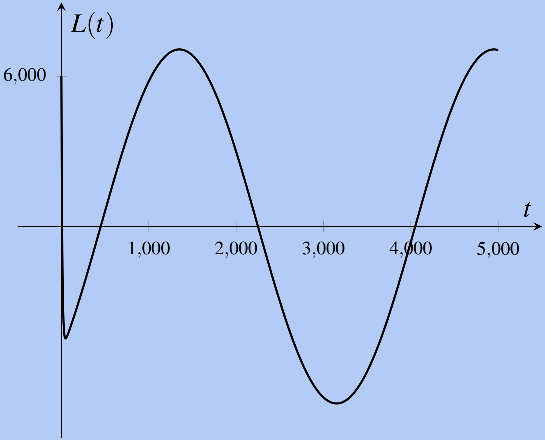
Y como $L(0) = 6000$, $\operatorname{sen}(0) = 0$ y $\cos(0) = 1$, entonces

$$6000 = L(0) = c - 5000 \Longrightarrow c = 11000$$

Ejemplo (Método de los coeficientes indeterminados)

Notar que cuando $t \to \infty$, $e^{-0{,}1t} \to 0$ y por lo tanto el término que domina es el que oscila.

Sin embargo, esto no converge a un valor dado, sino que oscila eternamente.



Ejercicio (Método de los coeficientes indeterminados)

Considere el mismo problema, pero ahora el ingreso de nuevos trabajadores oscila con la misma dinámica, pero alrededor de 1000, es decir, la ecuación diferencial ahora es

$$L'(t) + 0{,}1L(t) = 1000 + 1000\,\mathrm{sen}(0{,}1t)$$

Encuentre la solución a la ecuación diferencial con valor inicial $L(0) = 6000$. Haga un bosquejo de gráfico para la solución para t grande.

Ejercicio (Método de los coeficientes indeterminados)

Considere una variante del ejercicio anterior. Ahora, producto de una mejor coordinación entre las instituciones de educación superior y la industria hay un plan para que en el largo plazo no haya tantas oscilaciones en la cantidad de nuevos egresados. Ahora, cada año la oscilación cae en un 20 %, esto es, la dinámica del problema es

$$L'(t) + 0{,}1L(t) = 1000 + 1000e^{-0{,}2t}\,\mathrm{sen}(0{,}1t)$$

Encuentre la solución a la ecuación diferencial con valor inicial $L(0) = 6000$. Haga un bosquejo de gráfico para la solución para t grande. ¿Qué pasa cuando $t \to \infty$?

Ejercicio (Método de los coeficientes indeterminados)

Para el ejercicio anterior, suponga que las universidades pueden determinar la tasa de caída anual de la oscilación. Si las universidades quieren que en 10 años la oscilación se reduzca a menos de un 10^{-6}, ¿cuál es la tasa mínima que se necesita?

Ejercicio (Método de los coeficientes indeterminados)

Resuelva los siguientes problemas de valores iniciales:

1. $y'(t) - 0{,}5y(t) = t^2$, $y(0) = 2$.
2. $y'(t) - 2y(t) = te^{-3t}$, $x_0 = 2$.

EDLs de primer orden generales

- Para cerrar, vamos a analizar el caso donde $a(t)$ y $b(t)$ no son constantes.

- Vamos a mirar ecuaciones que se pueden escribir como

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t), \qquad t \in D$$

- Por límites de tiempo, solo miremos la ecuación homogénea

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

- Notar que si $y(t) = 0$ ya tenemos una solución, pero no es muy interesante.
  - Porque queremos encontrarlas todas.
  - Pensemos entonces que $y \neq 0$.
- Cuando $y \neq 0$, podemos escribir la EDL un poco diferente:

$$y'(t) = -a(t)y(t) \implies \frac{y'(t)}{y(t)} = -a(t)$$

- ¿Notan algo interesante?

- Al lado izquierdo hay una derivada muy particular.
  - La derivada de $\ln\big(y(t)\big)$.

- Es decir, podemos escribir

$$\frac{d}{dt}\ln\big(y(t)\big) = -a(t)$$

- Y si integramos a ambos lados obtenemos

$$\ln\big(y(t)\big) = \int -a(s)\,ds + C \Longrightarrow y(t) = e^{-\int a(s)\,ds + C} = ce^{-\int a(s)\,ds}$$

EDLs DE PRIMER ORDEN GENERALES

Teorema (EDL homogénea de primer orden general)

Considere la EDL homogénea

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0, \qquad t \in D, D \text{ intervalo}$$

con $a(t)$ una función continua. Entonces toda solución a esta ecuación es de la forma $ce^{-\int a(s)\,ds}$, con $c \in \mathbb{R}$.

- Notar que esto funciona incluso para el caso de $a(s) = a$, pues

$$-\int a\,ds = -at$$

- **¡IMPORTANTE!** Aquí no hay reglas generales para el comportamiento si $t \to \infty$.
  - Hay que estudiar el caso a caso.

- Hay otra forma de llegar a esta solución.

- Notar que si partimos de la ecuación original

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

- Podemos multiplicar por $e^{\int a(s)\,ds}$ y obtenemos

$$y'(t)e^{\int a(s)\,ds} + a(t)e^{\int a(s)\,ds}y(t) = 0$$

- El lado izquierdo es un término bien particular:

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)e^{\int a(s)\,ds}\right) = y'(t)e^{\int a(s)\,ds} + a(t)e^{\int a(s)\,ds}y(t)$$

- Luego, la ecuación nos queda

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)e^{\int a(s)\,ds}\right) = 0$$

- E inmediatamente obtenemos

$$y(t)e^{\int a(s)\,ds} = c \Longrightarrow y(t) = ce^{-\int a(s)\,ds}$$

- A la función $e^{\int a(s)\,ds}$ se le conoce como **factor integrante**.
  - Factor, porque se multiplica.
  - Integrante, porque al multiplicar por ella. la ecuación solo debe integrarse.

- Lo interesante es que visto de esta manera no necesitamos $y(t) \neq 0$.

- Esta lógica también sirve para las ecuaciones no homogéneas.
  - El factor integrante es el mismo.

Ejemplo (EDL de primer orden general)

Retomemos el modelo de empleo que conversamos antes. A raíz de la evolución demográfica, usted entiende que la tasa de decrecimiento no es constante en el tiempo. Esto, porque a medida que los años pasan se se jubila más del 10 % de la población. En particular, la tasa de jubilación en el tiempo t es $0{,}1 + 0{,}01t$. Usted quiere comparar la evolución de L, sin nuevos egresados, en ambos modelos. La ecuación diferencial ahora es

$$L'(t) = -(0{,}1 + 0{,}01t)L(t)$$

Seguiremos pensando que el 2005 (el año $t = 0$), se tiene $L(0) = 6000$.

Para el modelo anterior, teníamos que $L'(t) = -0{,}1L(t)$ y por lo tanto la solución al problema con valor inicial $L(0) = 6000$ es

$$L_1(t) = 6000e^{-0{,}1t}$$

Ejemplo (EDL de primer orden general)

Para el modelo nuevo, según el teorema anterior, la solución general a esta ecuación, usando factor integrante es

$$L_2(t) = ce^{\int -(0{,}1+0{,}01s)\,ds} = ce^{-0{,}1t-\frac{0{,}01}{2}t^2}$$

Como $L_2(0) = c$, entonces $c = 6000$ y la solución a este problema de valores iniciales es

$$L_2(t) = 6000e^{-0{,}1t-0{,}005t^2}$$

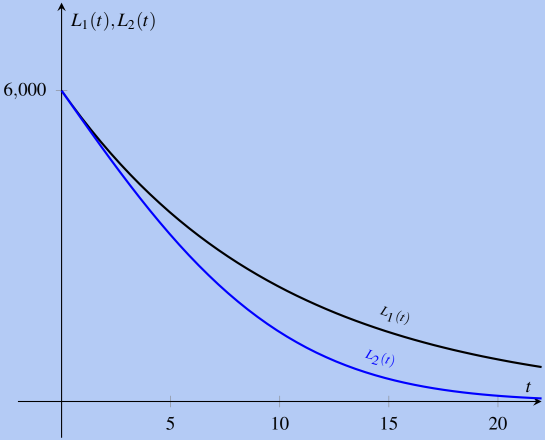
Este sistema dinámico también converge a 0 cuando $t \to \infty$, pero lo hace más rápido. De hecho, la cantidad de personas que no se han jubilado luego de 20 años ($t = 20$) es:

$$L_1(20) = 6000e^{-0{,}1\cdot 20} \approx 812{,}01$$
$$L_2(20) = 6000e^{-0{,}1\cdot 20-0{,}005\cdot 400} \approx 109{,}89$$

Ejemplo (EDL de primer orden general)

Podemos ver las diferencias en un gráfico.

La curva azul cae mucho más rápido que la negra a medida que el tiempo avanza.



Estabilidad

Estabilidad

- No siempre nos interesa lo que pasa con un sistema dinámico cuando $t \to \infty$.
- Muchas veces veces ni siquiera nos interesa su fórmula general.
- A veces queremos saber si puntos del sistema dinámico no se mueven.
  - Y queremos saber si nos acercaremos o nos alejaremos de ellos.

Definición (Punto fijo)

Sea $y(t) = f(t)$ un sistema dinámico (univariado) en tiempo continuo, con $t \in D$ y D un intervalo real. Diremos que y^* es un punto fijo o solución estacionaria si existe $t_0 \in \mathbb{D}$ tal que $y(t) = y^*$ para todo $t \geq t_0$.

En particular, si el sistema dinámico se describe por la ecuación diferencial

$$y^{(k)}(t) = g(t, y^{(k-1)}(t), \ldots, y'(t), y(t))$$

e y^* es un punto fijo, entonces

$$0 = g(t, 0, \ldots, 0, y^*)$$

- Nuevamente, podemos tratar de encontrar puntos fijos usando la ED.

Ejemplo (Punto fijo)

Pensemos en nuestro ejemplo de la introducción. La ecuación diferencial era

$$y'(t) = y(t)$$

Según la ecuación un punto fijo y^* debe cumplir

$$0 = y^*$$

Es decir, 0 es un punto fijo. En efecto, la solución general era $y(t) = ce^{-t}$, para que y sea constante, debe ser cierto que $y'(t) = 0$ para todo t. Como

$$y'(t) = -ce^{-t}$$

entonces $y'(t) = 0$ solo si $c = 0$, de donde $y^* = 0$.

Ejemplo (Punto fijo)

Pensemos ahora en la ecuación no homogénea

$$y'(t) - y(t) = b$$

Un punto fijo y^* debe cumplir

$$0 - y^* = b$$

Luego $y^* = -b$. ¡Este punto es igual a la solución particular que encontramos antes!

Esto no es casualidad, porque un punto fijo, al cumplir la ED, es una solución. Esto significa que si encontramos una ecuación no homogénea con un punto fijo, entonces ya encontramos su solución particular.

Ejemplo (Punto fijo)

Miremos ahora el ejemplo del empleo. La ecuación diferencial asociada era

$$L'(t) + 0{,}1L(t) = 1000$$

En este caso, si existe un punto fijo L^*, entonces

$$0 + 0{,}1L^* = 1000$$

de donde $L^* = 10\,000$.

Igual que antes, no es sorpresa que el punto fijo corresponda a la solución particular constante de la ED. A continuación veremos qué pasa con el ejemplo más complejo.

Ejemplo (Punto fijo)

Cuando incorporamos los ingresos universitarios oscilatorios, la ED era

$$L'(t) + 0{,}1L(t) = 1000\,\mathrm{sen}(0{,}1t)$$

Para que y^* sea un punto fijo del sistema dinámico que la resuelve, debe cumplirse que

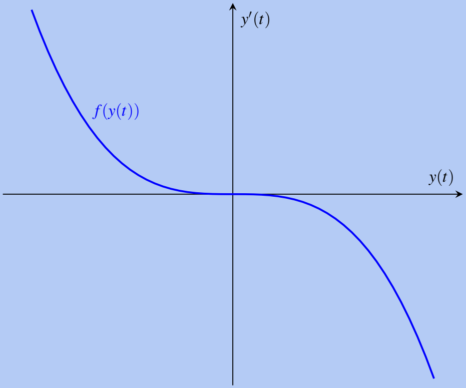
$$0 + 0{,}1y^* = 1000\,\mathrm{sen}(0{,}1t)$$

Pero esto no puede ocurrir, porque el lado izquierdo es constante y el lado derecho no. Luego, un sistema dinámico que resuelva esta ED no tiene puntos fijos.

Ejemplo (Punto fijo)

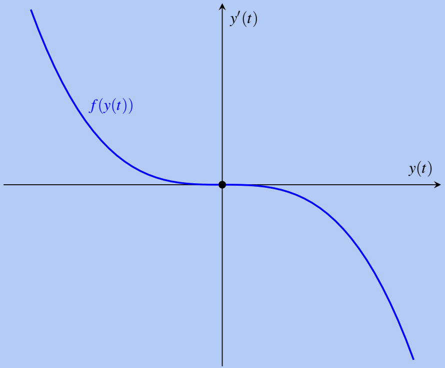
Los sistemas dinámicos que verifican ED de primer orden también se pueden analizar usando gráficos (diagramas de fase), pero como no hay "periodo siguiente", los ejes serán $y(t)$ e $y'(t)$: el valor y el cambio. Pensemos en la ED $y'(t) = f(y(t))$, que aparece en el gráfico de la derecha.

¿Existen puntos fijos? La respuesta es sí y son "simples" de ver.



Ejemplo (Punto fijo)

En un punto fijo, $y'(t) = 0$, es decir, la curva de $f(x_t)$ y el eje horizontal coinciden.



Ejercicio (Punto fijo)

Considere la EDL de primer orden

$$y'(t) = ay(t) + b$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Determine si existe un punto fijo cuando:

a) $a \neq 0$.

b) $a = 0$.

Ejercicio (Punto fijo)

Considere la ED de primer orden:

$$y'(t) = y(t)^2 - 1$$

Determine si esta ecuación diferencial tiene un punto fijo.

Ejercicio (Punto fijo)

Considere la ED de primer orden:

$$y'(t) = y(t)\ln\left(y(t)\right)$$

Determine si esta ecuación diferencial tiene un punto fijo.

Ejercicio (Punto fijo)

Considere la EDL lineal de segundo orden:

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b$$

Determine para qué valores de a_1, a_0 y b se puede asegurar que exista un punto fijo.

Ejercicio (Punto fijo)

Considere la EDL lineal de segundo orden:

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

con $a_0(t) \neq 0$ para todo t. Encuentre una condición suficiente para asegurar la existencia de un punto fijo. De un ejemplo y encuentre el punto fijo asociado.

Punto fijo

- Para cerrar, un dato adicional sobre los puntos fijos.
- Son útiles para presentar soluciones a EDL de primer orden.
- El siguiente resultado puede ayudar a ahorrar algo de tiempo.

Propiedad (Punto fijo y soluciones a EDL)

Suponga que $y(t)$ es solución de

$$y'(t) + ay(t) = b$$

y suponga que y^* es una solución estacionaria. Entonces,

$$y(t) = e^{-at}(y(0) - y^*) + y^*$$

Estabilidad

- Queremos ahondar en el estudio de puntos fijos.
- Como dijimos antes, nos interesa saber si nos podemos acercar a ellos.
  - O si acaso el sistema dinámico tiende a alejarse de ellos.
- Este concepto se conoce como **estabilidad**.

Definición (Estabilidad local)

Sea $y(t) = f(t)$ un sistema dinámico (univariado) en tiempo continuo y sea y^* un punto fijo de él. Decimos que y^* es localmente estable si para cualquier valor inicial $y(0)$ **cerca** de y^*, el sistema dinámico converge a y^*. En ese caso decimos que el sistema dinámico es localmente estable.

Definición (Estabilidad global)

Sea $y(t) = f(t)$ un sistema dinámico (univariado) en tiempo continuo y sea y^* un punto fijo de él. Decimos que y^* es localmente estable si para cualquier valor inicial $y(0)$, el sistema dinámico converge a y^*. En ese caso decimos que el sistema dinámico es estable.

Estabilidad

- Cuando el sistema verifica una ED de primer orden, es fácil ver estabilidad.
- Esto, porque podemos analizar los diagramas de fase.
- Partiremos este camino viendo un resultado similar al de EeD.

Teorema (Estabilidad local)

Sea f una función continuamente diferenciable y sea $y(t)$ un sistema dinámico que satisface la siguiente ED de primer orden

$$y'(t) = f\left(y(t)\right)$$

Sea y^* un punto fijo de $y(t)$. Entonces

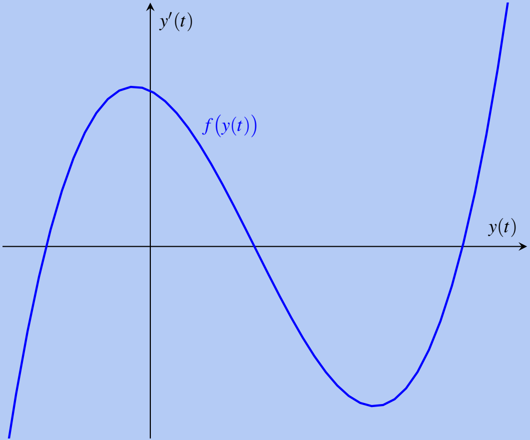
- Si $f'(y^*) < 0$, entonces y^* es localmente estable.
- Si $f'(y^*) > 0$, entonces y^* no es localmente estable (ni globalmente estable).

- Visualmente:
  - El primer caso ocurre si f cruza al eje horizontal de abajo para arriba.
  - El primer caso ocurre si f cruza al eje horizontal de arriba para abajo.

Ejemplo (Estabilidad local)

Consideremos el siguiente gráfico representando una ED de primer orden.

¿Cuántos puntos fijos tenemos?

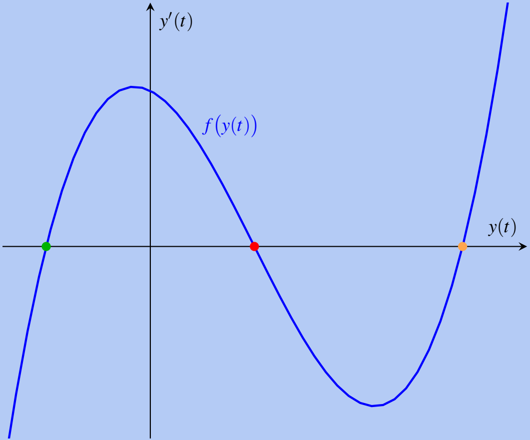


Ejemplo (Estabilidad local)

Tenemos tres puntos fijos, el verde, el rojo y el naranjo.

¿Cómo son estos puntos? El punto verde y naranjo no son estables. En cambio, el rojo sí lo es.

¿Es globalmente estable? ¡No! Como los otros no lo son, podemos partir a la izquierda del verde o a la derecha del naranjo y nunca llegaremos al punto rojo.

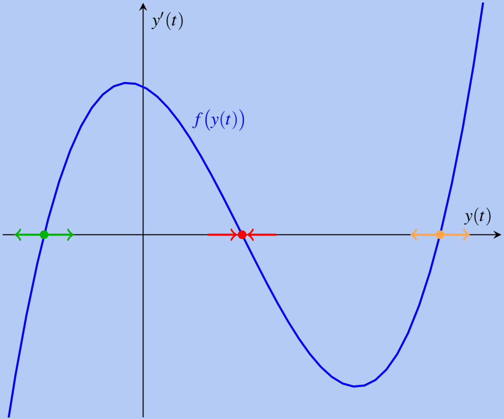


Ejemplo (Estabilidad local)

Para mostrar la evolución de un sistema dinámico en tiempo continuo, representado por un diagrama de fase, podemos dibujar flechas.

Las flechas indican hacia dónde se mueve el sistema dinámico:

- Si $y'(t) > 0$, entonces $y(t)$ crece.
- Si $y'(t) < 0$, entonces $y(t)$ decrece.



Teorema (Estabilidad local)

Sea f una función continua y sea $y(t)$ un sistema dinámico que satisface la siguiente ED de primer orden

$$y'(t) = f(y(t))$$

Sea y^* un punto fijo de $y(t)$. Entonces, si **cerca** de y^*

- $f(y^*)$ cambia de signo de positivo a negativo, entonces y^* es localmente estable.
- $f(y^*)$ cambia de signo de negativo a positivo, entonces y^* no es localmente estable.

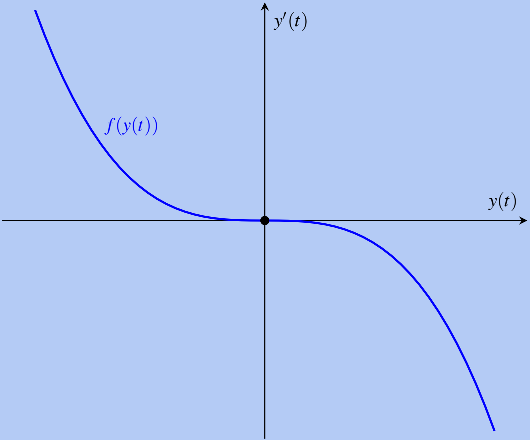
- Esta es una versión más general del teorema anterior.

Ejemplo (Estabilidad global)

En el ejemplo gráfico que revisamos antes teníamos un único punto fijo

¿Es localmente estable? Sí, la función f cambia de signo de positivo a negativo cerca de y^*.

¿Es globalmente estable? Si, si miramos con detención, desde donde partamos nos acercaremos al punto fijo.



Teorema Felipe Hafelin (Estabilidad local)

Sea f una función continua y sea $y(t)$ un sistema dinámico que satisface la siguiente ED de primer orden

$$y'(t) = f(y(t))$$

Suponga que y^* es el único punto fijo de $y(t)$. Entonces y^* es globalmente estable si y solo si es localmente estable.

- Visualmente:
  - Si y^* es único, entonces f corta al eje horizontal una sola vez.
  - Si cruza de abajo para arriba, no es localmente estable (ni globalmente estable).
  - Si cruza de arriba para abajo es localmente estable.
  - Pero también es globalmente estable porque f no cambia de signo.

Ejercicio (Estabilidad)

Considere la EDL de primer orden

$$y'(t) + ay(t) = b$$

con $a \neq 0$. Determine si el punto fijo es localmente estable. Si lo es, determine si es globalmente estable.

Ejercicio (Estabilidad)

Considere la siguiente ED de segundo orden

$$y''(t) = ay(t), \qquad t \geq 0$$

con $a > 0$. Suponga que la solución de esta ED es una función dos veces continuamente diferenciable $y(t)$ que cumple $y(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$ y que $y'(0) \geq 0$. Responda:

a) Encuentre una solución estacionaria.

b) Determine si el sistema es localmente estable.

c) Determine si el sistema es globalmente estable.

d) Resuelva esta ED razonando sobre la ecuación.

Ejercicio (Estabilidad)

El modelo de Solow con producción Cobb-Douglas también se puede revisar en tiempo continuo. Suponga que el capital per capita $k(t)$ sigue la siguiente ED

$$k'(t) = f\left(k(t)\right) = sk^{\alpha} - \lambda k$$

Donde $\alpha \in (0,1)$ es la productividad del capital, $s \in (0,1)$ es la tasa de ahorro y $\lambda > 0$ es la tasa de crecimiento de la población.

a) Encuentre las potenciales soluciones estacionarias.

b) Determine si estas soluciones son localmente estables.

Sea k^* el estado estacionario no nulo.

c) Encuentre cómo cambia k^* cuando cambian s y λ. Explique con sus palabras por qué ocurre esto.

d) ¿Qué pasa con k^* cuando $s \to 0$? Explique por qué ocurre esto.

e) ¿Qué pasa con k^* cuando $\lambda \to 0$? ¿Y cuando $\lambda \to 1$? Explique por qué ocurre esto.

Ejercicio (Estabilidad)

Sea $y(t)$ un sistema dinámico que resuelve la ED $y'(t) = f\left(y(t)\right)$ que se muestra en la imagen.

Muestre que el sistema no es estable, pero que para cualquier valor inicial $y(0)$ el sistema converge.